Komplexitätstheorie

Definition 1 (Rechenzeit).
$k - TM$
t_M *ist die Rechenzeit,* s_M *der Bandbedarf.*
$\tilde{t}_M(n) := max\{t_M(x)|x \in \Sigma^n\}$
$\tilde{s}_M(n) := max\{s_M(x)|x \in \Sigma^n\}$
$L_M := \{x \in \Sigma^\star | f_M(x) = \varepsilon\}$ *ist die von* M *erkannte Sprache*

Definition 2 (O-Notation).
$O(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | \exists c. \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c \cdot g(n) + c\}$
$o(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)+1}{g(n)+1} = 0\}$

Satz 1.
$$f \in O(g) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)+1} < \infty$$

Definition 3 (Komplexitätsklassen).
$ZEIT_\Sigma(f) := \{L_M | \tilde{t}_M \in O(f)\}$
$FZEIT_\Sigma(f) := \{f_M | \tilde{t}_M \in O(f)\}$
$BAND_\Sigma(f) := \{L_M | \tilde{s}_M \in O(f)\}$
$FBAND_\Sigma(f) := \{f_M | \tilde{s}_M \in O(f)\}$
$ZEIT(f) := \cup_\Sigma ZEIT_\Sigma(f)$
analog für FZEIT, BAND und FBAND.

Satz 2.
Für eine k-Band-TM gilt: $s_M(x) \leq t_M(x) + k$
Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ *mit* $t_M(x) \leq (lg(x) + 1) \cdot c^{s_M(x)+1}$
Falls $\tilde{s}_M$ *total und* $log \in O(\tilde{s}_M)$ *gibt es ein* c *mit*
$t_M(x) \leq c^{\tilde{s}_M(lg(x))}$

Satz 3.
$ZEIT(f) \subseteq BAND(f)$
Wenn $log \in O(f)$, *dann* $BAND(f) \subseteq \cup_{c\in\mathbb{N}} ZEIT(c^{f(n)})$

Separationssätze

Definition 4.
$\overline{ZEIT}(f) := \{\varphi_i^{-1}\{0\} | i \in \mathbb{N} \text{ und } \forall n. \Phi_i(n) \leq f(n)\}$

Satz 4.
Zu jedem rekursiven $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt es ein rekursives* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit*
$\overline{ZEIT}(f) \subsetneqq \overline{ZEIT}(g)$

Satz 5.
Es gibt keine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *so dass* $\overline{ZEIT}(f)$ *alle rekursiven Zahlenmengen enthält.*

Definition 5 (Band- und zeitkonstruierbar).
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *heißt bandkonstruierbar, wenn es eine TM* M *gibt mit* $\forall n. f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ *und* $\tilde{s}_M \in O(f)$
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *heißt zeitkonstruierbar, wenn es eine TM* M *gibt mit* $\forall n. f_M(0^n) = 0^{f(n)}$ *und* $\tilde{t}_M \in O(f)$

Satz 6. *Zeitseparationssatz*
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* g *zeitkonstruierbar,* $n \in O(g)$, $g \notin O(f(n) \cdot log f(n))$. *Dann gilt*
$ZEIT(g) \not\subseteq ZEIT(f)$

Satz 7. *Zeithierarchiesatz*
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* g *zeitkonstruierbar,* $n \in O(g)$, $f \in O(g)$, $g \notin O(f(n) \cdot log f(n))$. *Dann gilt*
$ZEIT(f) \subsetneqq ZEIT(g)$

Satz 8. *Bandseparationssatz*
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* g *bandkonstruierbar,* $log \in O(g)$. *Dann gilt*
$BAND(g) \subseteq BAND(f) \Leftrightarrow g \in O(f)$

Satz 9. *Bandhierarchiesatz*
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* g *bandkonstruierbar,* $log \in O(g)$, $f \in O(g)$, $g \notin O(f)$. *Dann gilt*
$BAND(f) \subsetneqq BAND(g)$

P, LOGSPACE, PSPACE

Definition 6 (P, LOGSPACE, PSPACE)**.**
$P := \cup_k ZEIT(n^k)$
$LOGSPACE := BAND(log)$
$PSPACE := \cup_k BAND(n^k)$
FP, FLOGSPACE und FPSPACE analog.

Satz 10.
$LOGSPACE \subseteq P \subseteq PSPACE$
$LOGSPACE \subsetneqq PSPACE$

Nichtdeterministische Komplexität

Kontroll-TM, nichtdeterminierte TM

Definition 7 (P, LOGSPACE, PSPACE)**.**
$NZEIT(f) := \{L_M | M \text{ ist KTM und } \tilde{t}_M \in O(f)\}$
$NBAND(f) := \{L_M | M \text{ ist KTM und } \tilde{s}_M \in O(f)\}$
$NP := \cup_k NZEIT(n^k)$
$NLOGSPACE := NBAND(log)$
$NPSPACE := \cup_k NBAND(n^k)$

Satz 11.
$ZEIT(f) \subseteq NZEIT(f)$
$BAND(f) \subseteq NBAND(f)$

Satz 12.
$NZEIT(f) \subseteq BAND(f)$

Daraus folgt:

Satz 13.
$NZEIT(f) \subseteq \cup_c ZEIT(c^{f(n)})$
$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq \cup_c ZEIT(2^{n^c})$

Satz 14.
Sei $log \in O(f)$. *Dann gilt:*
$NBAND(f) \subseteq \cup_c ZEIT(c^{f(n)})$ *und als Spezialfall*

$NLOGSPACE \subseteq P$
Satz von Savitch:
$NBAND(f) \subseteq BAND(f(n)^2)$ *und als Spezialfall*
$NPSPACE = PSPACE$

Reduzierbarkeit

Definition 8 (Reduzierbarkeit).
$L \leq_{log} M :\Leftrightarrow \exists f \in FLOGSPACE.\forall x \in \Sigma^\star.x \in L \Leftrightarrow f(x) \in M$
$L \leq_{pol} M :\Leftrightarrow \exists f \in FP.\forall x \in \Sigma^\star.x \in L \Leftrightarrow f(x) \in M$

Definition 9 (abgeschlossen).
K heißt abgeschlossen unter $\leq_\alpha$ *gdw.*
$\forall M \in K.L \leq_\alpha M \Rightarrow L \in K$

Lemma 1. *LOGSPACE, NLOGSPACE, P, NP, PSPACE sind abgeschlossen unter* $\leq_{log}$*,*
P, NP, PSPACE sind abgeschlossen unter $\leq_{pol}$*.*

Definition 10. *hart, vollständig*
M ist NP-hart (PSPACE-hart) gdw.
$\forall L \in NP.L \leq_{pol} M$ *(bzw.* $\forall L \in PSPACE.L \leq_{pol} M$*).*
M ist NLOGSPACE-hart (P-hart) gdw.
$\forall L \in NLOGSPACE.L \leq_{log} M$ *(bzw.* $\forall L \in P.L \leq_{log} M$*).*
M heißt NP-vollständig gdw.
M ist NP-hart und $M \in NP$
M heißt PSPACE-vollständig gdw.
M ist PSPACE-hart und $M \in PSPACE$
M heißt NLOGSPACE-vollständig gdw.
M ist NLOGSPACE-hart und $M \in NLOGSPACE$
M heißt P-vollständig gdw.
M ist P-hart und $M \in P$

Satz 15. *Es gibt vollständige Mengen für NLOGSPACE, P, NP und PSPACE.*

NP-vollständige Mengen:
2D-Domino-Problem
SAT
3SAT
CLIQUE
IND_SET

Weitere NP-vollständige Probleme:
HC (Hamilton-Kreis)
TS (Travelling Salesman)
3DM (3-dimensionales Matching)
kCOL (k-Färbbarkeit)
KNAPSACK (Rucksackproblem)
PARTITION (Partitionierung)
SCHEDULING

Satz 16. *GAP ist NLOGSPACE-vollständig.*

Satz 17. $GAP \in BAND((log(n))^2)$

Satz 18. $NLOGSPACE \subseteq BAND((log(n))^2)$

Satz 19. *Satz von Savitch*
Sei $log \in O(f)$. *Dann gilt*
$NNAND(f) \subseteq BAND((f(n))^2)$

Chomsky-Hierarchie

Sprachen	Grammatik	Regeln	Mengen	Maschine	Abschluss	Beispiel
Typ 0	Typ-0- Gramm.	$(\Pi \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^*$ $\to (\Pi \cup \Sigma)^*$	r.a. Mengen	TM	$\cup$	K_ϕ vollst.
Typ 1	kontext- sensitiv	$S \to \varepsilon$ oder $U \to V$, $lg(U) \leq lg(V)$, $v_1 S v_2 \notin V$	NBAND(n) $\subseteq$ rek. M	NTM		$\{a^n b^n c^n\}$ $\{ww\}$
Typ 2	kontextfrei	$\Pi \to (\Pi \cup \Sigma)^*$	/	Kellerautomat det. nichtdet.	$\cup \cdot *$ $^-$	$\{a^n b^n\}$ $\{w\$w^r\}$ $\{ww^r\}$
Typ 3	rechtslinear	$\Pi \to \Sigma^* \Pi \cup \Sigma^*$	reguläre M	endl. Automaten det.=nichtdet.	$\cup \cap \cdot *^-$	$\{a^n b^m\}$ $\{w\}$

Normalformen

Sprachen	Normalformen	Regeln
Typ 2	ε-frei Chomsky Greibach reduziert	ohne $\Pi \to \varepsilon$ $\Pi \to \Sigma$, $\Pi \to \Pi\Pi$ $\Pi \to \Sigma\Pi^*$ Π enthält nur Zeichen, die in einer Ableitung vorkommen
Typ 3	rechtslineare NF Potenzautomat	$\Pi \to \varepsilon$, $\Pi \to \Sigma\Pi$ vollst. deterministisch

Satz 20. *Sei* $\Sigma = \{a, b\}$. $\{ww | w \in \Sigma^*\}$ *ist kontext-sensitiv.*

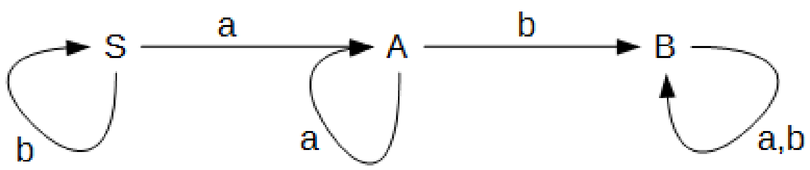
Beweis. Definiere die Grammatik $G = (\Sigma, \Gamma, S, R)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ und $\Gamma = \{S, T, A, B, C, D\}$ und den folgenden Regeln:

$S \longrightarrow \varepsilon$
$S \longrightarrow T$
$T \longrightarrow aTA$
$T \longrightarrow bTB$
$T \longrightarrow CA$
$T \longrightarrow DB$
$CA \longrightarrow Ca$
$CB \longrightarrow Cb$
$DA \longrightarrow Da$
$DB \longrightarrow Db$
$C \longrightarrow a$
$D \longrightarrow b$
$aA \longrightarrow Aa$
$aB \longrightarrow Ba$
$bA \longrightarrow Ab$
$bB \longrightarrow Bb$

Es gilt $L(G) = \{ww | w \in \Sigma^*\}$. □

Grammatik in EA überführen

S → bS | aA
A → aA | bB
B → aB | bB



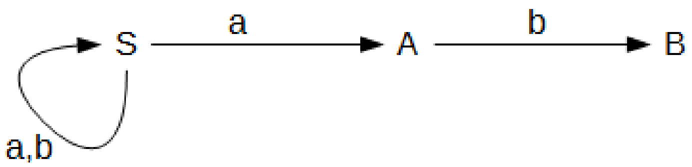
Potenzautomat

Jeder endliche Automat kann in einen determinierten überführt werden.

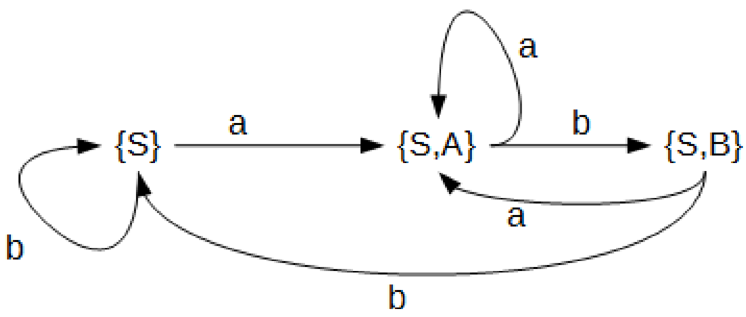
Beispiel:
$S \to aS|bS|aA$
$A \to aA$
$A \to bB$
B Endzustand.

P	a	b	$W \setminus V$
$\{S\}$	$\{S,A\}$	$\{S\}$	$\{S,A\}$
$\{S,A\}$	$\{S,A\}$	$\{S,B\}$	$\{S,B\}$
$\{S,B\}$	$\{S,A\}$	$\{S\}$	/

Nichtdeterminierter Automat



Determinierter Automat



Satz 21. *Folgende Mengen sind rekursiv:*
$P_\epsilon := \{(L, x) \in REG(\Sigma) \times \Sigma^* | x \in L\}$ *(Wortproblem)*
$P_\subseteq := \{(L_1, L_2) \in REG(\Sigma) \times REG(\Sigma) | L_1 \subseteq L_2\}$ *(Inklusionsproblem)*
$P_= := \{(L_1, L_2) \in REG(\Sigma) \times REG(\Sigma) | L_1 = L_2\}$ *(Äquivalenzproblem)*
$P_\emptyset := \{L \in REG(\Sigma) | L = \emptyset\}$ *(Leerheitsproblem)*
$P_E := \{L \in REG(\Sigma) | \sharp L \textit{ endlich}\}$ *(Endlichkeitsproblem)*

Satz 22. *Pumping-Lemma für reguläre Sprachen*
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ *regulär. Dann gilt:*
Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $t, \bar{t}, z \in \Sigma^*$ *mit* $tz\bar{t} \in L$ *und* $lg(z) = n$ *gilt:*
$\exists u, v, w \in \Sigma^*.(z = uvw \wedge v \neq \varepsilon \wedge \forall i \geq 0.tuv^i w\bar{t} \in L)$

Definition 11. *Ableitungsbäume*

Definition 12. *Eine kontextfreie Grammatik G heißt eindeutig, gdw. jedes $w \in L(G)$ genau einen Ableitungsbaum hat.*
Eine kontextfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt eindeutig, wenn es eine eindeutige Grammatik G gibt, so dass $L = L(G)$.

Satz 23. *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen*
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass man jedes Wort $z \in L$ mit $lg(z) \geq p$ zerlegen kann in Teilworte u, v, w, x, y mit:
$z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$, $lg(vwx) \leq p$, $\forall i \geq 0. uv^i wx^i y \in L$

Satz 24.
Die Mengen $\{G | G$ kontextfrei und $L(G) = \emptyset\}$ und $\{G | G$ kontextfrei und $L(G)$ endlich$\}$ sind entscheidbar.

Folgende Mengen sind rekursiv:

		kontextfrei	deterministisch
Wortproblem	$P_\epsilon := \{(L, x) \| x \in L\}$	+	+
Inklusion	$P_\subseteq := \{(L_1, L_2) \| L_1 \subseteq L_2\}$	-	-
Äquivalenz	$P_= := \{(L_1, L_2) \| L_1 = L_2\}$	-	+
Leerheit	$P_\emptyset := \{L \| L = \emptyset\}$	+	+
Endlichkeit	$P_E := \{L \| \sharp L$ endlich$\}$	+	+
Universalität	$P_U := \{L \| L = \Sigma^*\}$	-	+
Eindeutigkeit	$P_1 := \{L \| L$ eindeutig$\}$	-	+
Determiniertheit	$P_D := \{L \| \sharp L$ deterministisch$\}$	-	+